Quand l'algèbre rencontre la topologie : les opérades

Bruno VALLETTE

Université Sorbonne Paris Nord

Congrès de la SMF Dijon 2025

3 juin, 2025

Table des matières

Table des matières

TOPOLOGIE : Peut-on reconnaître les espaces topologiques qui ont le type d'homotopie d'un espace de lacets itérés $\Omega^n X := Top(S^n, X)$?

ALGÈBRE : Est-ce que le foncteur «algèbre enveloppante» $\mathfrak{U}$: algèbres de Lie nilpotentes $\to$ algèbres associatives

$$\mathfrak{U}\mathfrak{g} := \mathrm{T}(\mathfrak{g})/(x \otimes y - y \otimes x - [x, y])$$

détecte les isomorphismes ?

GÉOMÉTRIE : Est-ce que la structure de Hodge mixte sur le cohomologie de la compactification partielle

$$\mathcal{M}_{0,n} \subset \mathcal{M}^{\delta}_{0,n} \subset \overline{\mathcal{M}}_{0,n}$$

de F. Brown est pure ?

$\boxed{\longrightarrow \text{OUI !}}$

Table des matières

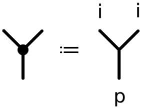
- STRUCTURE ALGÉBRIQUE : produit associatif sur A

$$\nu : A^{\otimes 2} \to A \quad , \quad \nu(\nu(a,b),c) = \nu(a,\nu(b,c))$$

- TRANSPORT DE STRUCTURE : isomorphisme

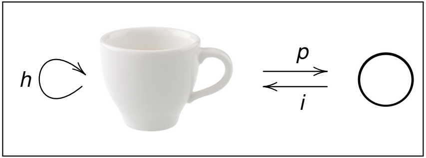
$$A \underset{i}{\overset{p}{\rightleftarrows}} H \ , \quad ip = \mathrm{id}_A \quad \text{et} \quad pi = \mathrm{id}_H \ .$$

$$\mu_2 := p\,\nu\,i^{\otimes 2} \ : \ H^{\otimes 2} \to H \ : \ \text{associatif}$$



- RELATION D'ÉQUIVALENCE HOMOTOPIQUE :

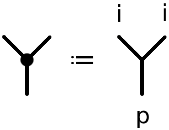
Rétract par déformation



Version algébrique

$$h \circlearrowright (A, d_A) \underset{i}{\overset{p}{\rightleftarrows}} (H, d_H)$$

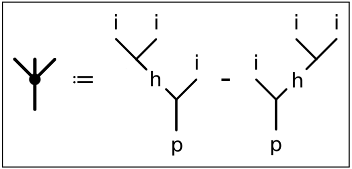
$$\mathrm{id}_A - ip = d_A h + h d_A \neq 0$$

- PRODUIT TRANSPORTÉ : 

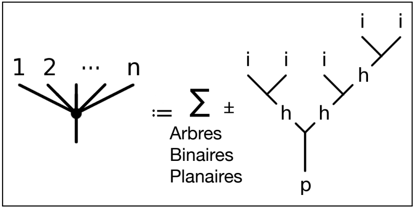
: pas associatif

- IDÉE : introduire $\mu_3 : H^{\otimes 3} \to H$

mesure le défaut d'associativité de μ_2 .

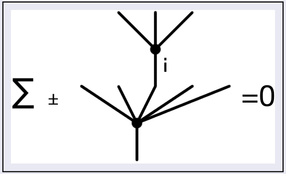


Et ainsi de suite :
$\mu_n : H^{\otimes n} \to H$,
pour $n \geqslant 2$.



Définition (A_∞-algèbre, Stasheff 1963)

$(H, \mu_1 = d_H, \mu_2, \mu_3, \ldots)$ telle que



Théorème (Transport homotopique, Kadeishvili 1982)

H retract par déformation de A : $(H, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots)$ A_∞-algèbre.

- notion homotopiquement stable
- considérer des structures supérieures $\Longrightarrow$
  pas de perte d'information algébro-homotopique

- THÉORIE DE LA REPRÉSENTATION : morphisme d'anneaux

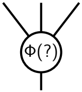
$$\boxed{\begin{array}{ccc} (A, \cdot, 1) & \xrightarrow{\Phi} & (\mathrm{Hom}(V, V), \circ, id_V) \\ a & \mapsto & \Phi(a) \end{array}}$$

EXEMPLE : $A = \mathbb{K}\langle x, y\rangle/(x^2, y^2, xy - yx)$ code universellement les paires d'opérateurs linéaires de carré nul qui commutent.

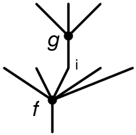
- THÉORIE DE LA REPRÉSENTATION MULTILINÉAIRE : morphisme de quoi ?

$$(?,?) \xrightarrow{\Phi} (\mathrm{End}_V := \mathrm{Hom}(V^{\otimes n}, V)_{n\in\mathbb{N}}, \circ_i)$$

$$? \mapsto$$



$f \circ_i g =$



Définition (Opérade, May 1972)

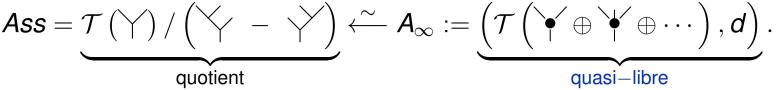
- Collection : $\{\mathcal{P}(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{S}_n$-modules
- Compositions : $\circ_i : \mathcal{P}(n) \otimes \mathcal{P}(m) \to \mathcal{P}(n+m-1)$

Définition (Algèbre sur une opérade)

Structure de $\mathcal{P}$-algèbre : morphisme d'opérades $\mathcal{P} \to \mathrm{End}_V$.

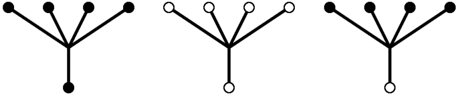
EXEMPLE : $As := \mathcal{T}$ () / ( - ) $\to$ algèbres associatives

$$\begin{tikzcd}
\text{opérade } \mathcal{P} = \mathcal{T}(V)/(R) \arrow[d, dotted] & \mathcal{P}_\infty \arrow[l, "\sim"'] \arrow[d, dotted] \quad : \ \text{résolution (syzygies opéradiques)} \\
\text{catégorie d'algèbres de type } \mathcal{P} \arrow[r, hook] & \text{catégorie de } \mathcal{P}_\infty\text{-algèbres}
\end{tikzcd}$$



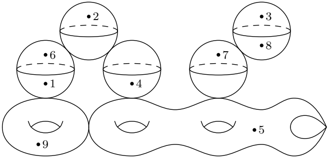
- Changement de paradigme en algèbre universelle : considérer toutes les opérations possibles en un seul objet.
- Théorie effective pour gérer les calculs avec les structures algébriques supérieures ($\neq$ catégorie des modèles).
- Boîte à outils complète : dualité de Koszul, bases de Gröbner, théorème de transport homotopique, ∞-morphismes, etc.

- OPÉRADES COLORÉES : action sur plusieurs espaces

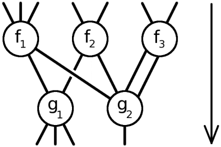


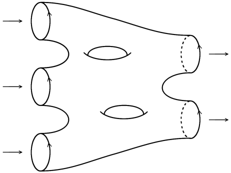
- OPÉRADES MODULAIRES : espaces de modules de courbes

$\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$:



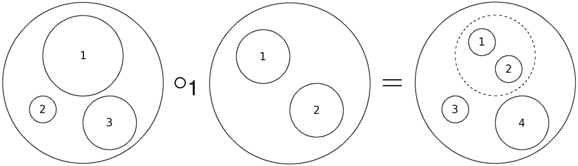
- PROPÉRADES : plusieurs entrées et plusieurs sorties





Théorème (May, 1972)

$$Y \sim \Omega^n X \iff Y : D^n\text{-algèbre}$$



Théorème (Campos–Robert-Nicoud–Wierstra–Petersen, 2024)

Le foncteur «algèbre enveloppante» $\mathfrak{U}$ détecte les isomorphismes.

Démonstration.

$\to$ calcul des algèbres pré-Lie [Dotsenko–Shadrin–V., 2016] $\square$

Théorème (Dupont–V., 2017)

La structure de Hodge mixte sur $H^k(\mathcal{M}^\delta_{0,n}, \mathbb{Q})$ est pure.

$\longrightarrow$ strates indicées par les arbres planaires : opérade dihédrale libre

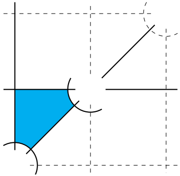


Table des matières

Définition (Kontsevich–Manin, 1994)

$H_\bullet(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})$-algèbre : théories cohomologiques des champs (CohFT)

$\to$ Structure des invariants de Gromov–Witten sur $H^\bullet(X)$.

GROUPE DE GIVENTAL : action des lacets formels de $GL(A)$ sur les CohFTs via des classes caractéristiques tautologiques.

DRINFELD : Définitions de groupes/algèbres de Lie de Grothendieck–Teichmüller (GRT_1 prounipotent) via $\pi_1^{\text{geo}}(\mathcal{M}_{0,4})$.

Théorème (Dotsenko–Shadrin–Vaintrob–V., 2024)

- *Notion de CohFT_∞ quantiques (invariants de GW sur $C^\bullet(X)$).*
- *Groupe de symétries universelles (complexe de graphes de Kontsevich enrichi en classes caractéristiques tautologiques).*
- *Contient GRT_1 et le groupe de Givental.*

Théorème (Roca i Lucio, 2023)

- *Pour tout corps, on a une adjonction de Quillen :*
  $$\mathrm{L} \; : \; \text{Ens. simpl.} \underset{\perp}{\overset{\longrightarrow}{\longleftarrow}} \text{alg. } \mathrm{L}_\infty \text{ abs. part.} \; : \; \mathrm{R}$$
- *L'unité d'adjonction* $X \xrightarrow{\sim} RL(X)$ *est une* $\mathbb{F}_p$*-équivalence.*
- $\pi_n\left(\left(S^d\right)_{\mathbb{F}_p}\right) \cong \pi_n\left(RL\left(S^d\right)\right) \cong rep\left(L\left(S^d\right)_n\right) / \sim.$

Théorème (Emprin, 2024)

- *Soient* $p \neq l$ *premiers et soit* X *le complémentaire d'un arrangement d'hyperplans défini sur* $\mathbb{Q}_p \subset K \subset \mathbb{C}$*. L'algèbre des cochaînes singulières* $\mathrm{C}^\bullet_{sing}(X_{an}, \mathbb{Z}_{(l)})$ *est s-formelle, pour un certain s optimal.*
- *Classes (Kaleidin-Emprin) fidèles d'obstruction à la formalité.*
- *Propriété de descente (extension fidèlement plate).*